

# 记忆 - 题解

## Subtask #1

白送的，暴力模拟即可。

## Subtask #2

观察到每次割草割掉的一定是一段后缀，并且草的高度总是单调不减的，于是可以使用线段树或者单调栈+二分，时间复杂度为  $O(n \log n)$

不过单调栈+二分的常数更小一点。

## Subtask #3

我们称每  $m$  天为一个周期。

我们为每一株草建立一个字符串  $s$ ， $s_{i,j}$  表示草  $i$  在第  $j$  天黄昏是否会被割掉。

### 引理 A

在草  $i$  被第一次割掉之后，令这个第一次的时间为  $t$ ，则  $s_i$  将从  $s_{i,t}$  开始循环，循环的周期为  $m$ 。

### 证明

引理 A 可以转化为如下等价引理：

假设草  $i$  在第  $t$  天被割掉了，那么它也将第  $t + m$  天被割掉。

因为转化以后的引理相当于“草  $i$  在第  $t$  天结束时和第  $t + m$  天结束时高度相同”，因此显然会循环。

接下来我们来证明这个转化后的引理：

令  $g_j$  为第  $j$  天结束后草  $i$  的高度，特别地，若  $j < 0$ ，有  $g_j = -i \times j$ 。

显然，由于第  $t$  天草被割掉了，所以  $g_t \geq g_{t-m}$ 。

然后，对于第  $t + 1$  天，由于在第  $t + 1 - m$  天草没被割掉，有  $g_{t+1-m} \leq$  该天计划的高度，而  $g_{t+1} = \min\{g_t + i, \text{该天计划的高度}\}$ ，又有  $g_t + i \geq g_{t-m} + i = g_{t+1-m}$  因此有  $g_{t+1} \geq g_{t+1-m}$ 。

以此类推，我们沿用类似的结论可以得出  $g_{t+m-1} \geq g_{t-1}$ ，因此在第  $t + m$  天开始时草的高度一定不低于第  $t$  天开始时草的高度，故在第  $t + m$  天也会被割掉。

引理得证。

于是我们可以先扫描一遍求出草被第一次割掉的位置，随后  $O(m)$  地计算出循环节，然后搞一搞即可。

## Subtask #4

做法与 Subtask #3 相同，只不过需要对每一株草分别算一次。

## Subtask #5

我不会。

## Subtask #6

令  $S_i$  表示第  $i$  株草在循环节内的哪些天数被割掉了。

### 引理 B

$\forall i \in [1, n-1], S_i \subseteq S_{i+1}$ 。

## 证明

因为每次割草割掉的是一段后缀，所以  $i$  在循环里被割了就意味着  $i+1$  在循环里被割了。

如是，我们可以求出每一天会在哪段后缀的循环节里出现，考虑用历史版本线段树维护历史版本和，由于第  $i$  株草第一次被割掉的时刻一定不晚于第  $i+1$  株草第一次被割掉的时刻，只要我们知道了每株草第一次被割掉的时间，我们就可以依序从历史版本和线段树中删除元素并打 tag 来维护前缀和，具体实现细节见标算。这部分的时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。

只剩下最后一个问题——第  $i$  株草第一次被割掉的时间怎么求。

记第一株草第一次被割掉的时间为  $t$ ，此时执行到了计划的第  $p$  天。

由引理 B，对于后面的所有草，它们的循环节都将包含  $p$ 。

因此，我们可以使用  $O(1)$  算出第  $i$  株草第一次在计划的第  $p$  天被割掉的时间是多少，记这个时间为  $t_i$ ，不难发现该株草最早被割掉的时间不早于  $t_i - m$ 。

于是问题就变成了询问  $[t_i - m, t_i]$  上最早能割掉这株草的时间，一种暴力的想法是先二分，然后看二分出来的区间上是否存在一个时点这株草将被割掉。可以将这个二分挪到线段树上，观察可以得出这是一个斜率优化的形式，具体来说，记第  $i$  株草的高度式子为  $k_i x + b_i$ ， $j$  比  $k$  优秀当且仅当  $h_j - k_i j - b_i < h_k - k_i k - b_i$ ，简单化一下式子之后用线段树维护凸包即可，具体实现细节见标程。

时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。